

2017-02-02  
matematyka sem.I.1  
– egzamin, termin 1

NAZWISKO IMIĘ  
nr indeksu: .....  
MCHT gr. ....

Student(ka) z pięciu poniższych zadań wybiera trzy  
i odpowiedzi wyłącznie na te pytania są oceniane,  
każde w skali 0-9 pkt.

Odpowiedniość między liczbą punktów a oceną:

00-13: ndst; 13-15: dst; 16-18: dst+;

19-21: db; 22-24: db+; 25-27: bdb.

Osoba przekazująca do sprawdzenia pracę niechlujną  
otrzymuje wpis: ndst (2.0).

Jest bezsensowne przyjść na egzamin w terminie 2  
(16 bm., 9:45 – grupy 1, 2 i 3; 11:30 – grupy 4 i 5; CM-201),  
jeśli się nie umie odpowiedzieć wyczerpująco  
i ze zrozumieniem na pytania postawione w terminie 1.

zad.	pkt.	
A1		/9
A2		/9
A3		/9
A4		/9
A5		/9
		/27

A1. Przytocz definicje funkcji  $f$  zmiennej  $x$  i funkcji odwrotnej do  $f$ .

Dla funkcji  $f, f(x) := 1/(1+x^2)$ ,

odpowiednio zawężonej wyznacz jej odwrotną ( $f^{-1}$ ).

Naszkluj wykresy  $y = f(x)$  i  $y = f^{-1}(x)$ .

A2. Przedstaw równania prostej na płaszczyźnie  $\mathbf{R}^2$

(odnotowując ich związek z odpowiednimi wektorami).

Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkt  $A = (1, 2)$   
i jest styczna do paraboli  $y = 1-x^2$ .

A3. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capelliego.

Przedyskutuj rozwiązalność układów  $Mx = b$  i  $Mx = c$ ,

$$\text{gdym } M := \begin{bmatrix} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 1 & r \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$r$  – dowolna liczba rzeczywista.

A4. Przytocz definicję sumy szeregu liczbowego.

Podaj przykłady szeregów zbieżnych i szeregów rozbieżnych.

Oblicz sumę szeregu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ .

A5. Podaj twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

w rachunku różniczkowym.

Zilustruj to twierdzenie na przedziale  $\langle -1, 2 \rangle$  dla funkcji  $f$ ,  
 $f(x) := x^3/2$ ; zapisz przy tym równania odpowiednich prostych.

2017-02-02  
matematyka sem.I.1  
– egzamin, termin 1

NAZWISKO IMIĘ  
nr indeksu: .....  
MCHT gr. ....

Student(ka) z pięciu poniższych zadań wybiera trzy i odpowiedzi wyłącznie na te pytania są oceniane, każde w skali 0-9 pkt.

Odpowiedniość między liczbą punktów a oceną:

00-13: ndst; 13-15: dst; 16-18: dst+;  
19-21: db; 22-24: db+; 25-27: bdb.

Osoba przekazująca do sprawdzenia pracę niechlujną otrzymuje wpis: nast. (2.0).

Jest bezsensowne przyjść na egzamin w terminie 2 (16 bm., 9:45 – grupy 1, 2 i 3; 11:30 – grupy 4 i 5; CM-201), jeśli się nie umie odpowiedzieć wyczerpująco i ze zrozumieniem na pytania postawione w terminie 1.

zad.	pkt.	
B1		/9
B2		/9
B3		/9
B4		/9
B5		/9
		/27

B1. Objaśnij pojęcie ‘relacja równoważności’.

Podaj trzy przykłady relacji równoważności.

Pokaż, że relacja  $\sim$  zdefiniowana wzorem  $A \sim B$ , jeśli istnieje macierz nieosobliwa  $P$ , że  $B = P^{-1}AP$ , jest relacją równoważności w zbiorze macierzy kwadratowych ustalonego stopnia.

B2. Przedstaw równania płaszczyzny w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$

(odnotowując ich związek z odpowiednimi wektorami).

Wyznacz kąt, jaki tworzą płaszczyzny  $U$  i  $V$ ,

gdy płaszczyzna  $U$  przecina osie układu kartezjańskiego w punktach jednostkowych,

a na płaszczyźnie  $V$  leżą punkty  $(0,0,0)$ ,  $(1,1,0)$  i  $(1,1,2)$ .

B3. Podaj definicję ciągu liczbowego, wypowiedz się o zbieżności.

Ile wynosi granica, przy  $n \rightarrow \infty$ , ciągu  $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$ , gdy  $a_n := n^{1/n}$ .

Wyznacz tę granicę.

B4. Podaj definicję pojęcia ‘ekstremum funkcji’.

Podaj twierdzenie Fermata, także z użyciem zwrotu typu

‘warunek dostateczny’, ‘warunek konieczny’.

W przedziale  $\langle -3, 2 \rangle$  wyznacz ekstrema funkcji  $f$ ,

gdy  $f(x) := x^4 - 3x^2 + 2x$ .

B5. Podaj reguły de l’Hopitala (wskazując, kiedy się je stosuje).

Oblicz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3(1+2^x)}{\log_6(4+5^x)}$ .

2017-02-02  
matematyka sem.I.1  
– egzamin, termin 1

NAZWISKO IMIĘ  
nr indeksu: .....  
MCHT gr. ....

Student(ka) z pięciu poniższych zadań wybiera trzy  
i odpowiedzi wyłącznie na te pytania są oceniane,  
każde w skali 0-9 pkt.

Odpowiedniość między liczbą punktów a oceną:

00-13: ndst; 13-15: dst; 16-18: dst+;  
19-21: db; 22-24: db+; 25-27: bdb.

Osoba przekazująca do sprawdzenia pracę niechlujną  
otrzymuje wpis: ndst (2.0)

Jest bezsensowne przyjść na egzamin w terminie 2  
(16 bm., 9:45 – grupy 1, 2 i 3; 11:30 – grupy 4 i 5; CM-201),  
jeśli się nie umie odpowiedzieć wyczerpująco  
i ze zrozumieniem na pytania postawione w terminie 1.

zad.	pkt.	
C1		/9
C2		/9
C3		/9
C4		/9
C5		/9
		/27

C1. Przedstaw wzór dwumianowy ( $a, b \in \mathbf{R}; n \in \mathbf{N}$ ).

Wykaż ten wzór.

Zapisz rekurencję wiążącą współczynniki dwumienne Newtona.

Udowodnij ten związek.

C2. Wyznacz funkcję odwrotną,  $f^{-1}$ , do funkcji  $f, f(x) := \sinh x$ .

Naszkiej wykresy  $y = f(x)$  i  $y = f^{-1}(x)$ .

C3. Podaj definicję iloczynu wektorowego wektorów  $a$  i  $b$ ,  
a także wzór analityczny na ten iloczyn.

Zapisz układ równań, rozwiązanie którego daje ten wzór.

Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, 3).$$

C4. Co to jest ciąg funkcyjny ?

Napisz, co znaczy, że ciąg funkcyjny  $(f_n)_{n=1,2,3,\dots}$  jest zbieżny

a) w punkcie  $x_0$ , że w  $x_0$  ma granicę,

b) w zbiorze/przedziale  $A$ ,

c) jednostajnie w zbiorze/przedziale  $A$ .

Podaj przykłady, w których granica ciągu  $(f_n)$  jest tego samego  
typu, co funkcje  $f_n$ , nie jest tego samego typu.

C5. Napisz, co to jest szereg Taylora,  $T_f$  funkcji  $f$ .

Omów związek między  $f$  i  $T_f$ .

Uzyskaj szereg  $T_f$ , gdy  $f(x) := \ln(1+x)$ ,  $-1 < x$ .

Oblicz promień zbieżności,  $R$ , tego szeregu  $T_f$ .

2017-02-02  
matematyka sem.I.1  
– egzamin, termin 1

NAZWISKO IMIĘ  
nr indeksu: .....  
MCHT gr. ....

Student(ka) z pięciu poniższych zadań wybiera trzy i odpowiedzi wyłącznie na te pytania są oceniane, każde w skali 0-9 pkt.

Odpowiedniość między liczbą punktów a oceną:

00-13: ndst; 13-15: dst; 16-18: dst+;  
19-21: db; 22-24: db+; 25-27: bdb.

Osoba przekazująca do sprawdzenia pracę niechlujną otrzymuje wpis: ndst (2.0).

Jest bezsensowne przyjść na egzamin w terminie 2 (16 bm., 9:45 – grupy 1, 2 i 3; 11:30 – grupy 4 i 5; CM-201), jeśli się nie umie odpowiedzieć wyczerpująco i ze zrozumieniem na pytania postawione w terminie 1.

zad.	pkt.	
D1		/9
D2		/9
D3		/9
D4		/9
D5		/9
		/27

- D1. Podaj definicję (geometryczną) iloczynu skalarnego wektorów  $a$  i  $b$  płaskich (tj. w  $\mathbf{R}^2$ ), a także przestrzennych (tj. w  $\mathbf{R}^3$ ).  
Określ pojęcie ‘iloczyn skalarny wektorów  $n$ -wymiarowych’.  
Oblicz kąt między wektorami  $AB$  i  $AC$ ,  
gdzie  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 0)$ ,  $C = (0, 0, 3)$ .
- D2. Podaj twierdzenie Bernoulliego o istnieniu liczby Eulera  $e$ .  
Wykaż to twierdzenie.  
Zapisz za pomocą szeregów liczbę  $e$  i funkcję  $f, f(x) := e^x$ ;  
naszkiuj jej wykres.
- D3. Napisz, kiedy mówimy, że funkcja  $f$  jest wypukła, że jest wklęsła, że  $x_0$  jest jej punktem przegięcia.  
Wyznacz punkt przegięcia funkcji  $f, f(x) := 1/\exp(x^2)$ . Naszkicuj wykres tej funkcji.
- D3. Przedstaw równania płaszczyzny w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$ .  
Wyznacz równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkt  $(1, 1, 1)$  i jest równoległa do wektora  $[-1, -1, -1]^T$ .
- D5. Zdefiniuj pojęcie ‘obwiednia’ rodziny krzywych.  
Zapisz układ rozwiązujący zadanie wyznaczenia obwiedni.  
Wyznacz obwiednię rodziny prostych płaskich (tzn. w  $\mathbf{R}^2$ ), które odcinają na osiach  $Ox$  i  $Oy$  odcinki o tej samej długości  $a$ .

Krótkie omówienie egzaminu przeprowadzonego w czwartek 2 bm.:

Mogło przystąpić do egzaminu 136, przystąpiło 118,  
ocenę pozytywną uzyskało 51.

Podstawowe uwagi:

- odpowiedź nie na temat: 0 punktów (np. zamiast tw. Fermata o ekstremach kilka osób pisało o tzw. wielkim twierdzeniu Fermata – tego, skądinąd interesującego, twierdzenia nie omawialiśmy na zajęciach, o nie nie pytałem),
- pomyłka w przepisaniu treści: 0 punktów, jeśli ta pomyłka ułatwia zadanie (np. gdy zamiast  $\exp(-x^2)$  ktoś przepisze  $\exp(-x)$ ),
- błędy rachunkowe prowadzące do uproszczenia zadania (np. zapisanie 0 zamiast 6 lub 9 w macierzy, jeśli skutkuje znacząco łatwiejszymi dalszymi przekształceniami),
- brak objaśnień (np. co oznaczają użyte w wypowiedzi  $a$ ,  $c_k$ ,  $X$ ), objaśnienia niepełne, zbyt lakoniczne, np. takie:
  - *Ekstremum funkcji jest to jej minimum lub maksimum* – nie jest napisane, co to jest maksimum, co to jest minimum,
  - ograniczenie odpowiedzi na pytanie o ciąg zbieżny do zdania: *Jest to ciąg, który ma granicę* (trzeba wyjaśnić, co znaczy termin ‘granica ciągu’),
  - w odpowiedzi o twierdzenie Kroneckera-Capelliego: brak wyjaśnienia, co jest macierz uzupełniona/rozszerzona, czego jest to macierz (trzeba napisać, że urala – układu równań algebraicznych liniowych),
- nierozróżnianie definicji i twierdzenia (np. w zdaniu: *Mówimy, że  $x_0$  jest punktem przegięcia funkcji  $f$ , jeśli  $f''(x_0) = 0$ .*)
- nieczytelne pismo (często sprawiające, że sam piszący nie wie, co napisał),
- niewskazanie (poprzez skreślenie/wykreślenie rubryki w kolumnie pkt.) numerów zadań, na które egzaminowany nie udzielał odpowiedzi,
- mylenie (kolejności) nazwiska i imienia, mylnie wskazana grupa, pomyłkowe skreślenia zdań itp. (tym razem tego typu uchybienia darowałem).

Z uwagi na to, że to pierwszy Państwa egzamin z matematyki,

oceny pozytywne postawiłem każdej osobie, która przekroczyła nie 12 punktów, lecz która uzyskała co najmniej 12 punktów; to niewielkie przesunięcie poskutkowało tym, że zdało 7 osób więcej (mianowicie 7 studentów otrzymało 12 punktów).

Jak zapowiedziałem, każdy student/studentka może obejrzeć swą pracę w najbliższy czwartek, 9. lutego 2017, w godz. 9:45-13:00 w E-744. Przyjmuję reklamacje w sprawie liczby przyznanych punktów, jeśli przyznałem za mało co najmniej 3 punkty (i jest to zgodnie z tym, co zapowiedziałem: po to było 5 zagadnień i 3 z nich do wyboru, by egzaminowany/egzaminowana wybrał/wybrała te pytania, na które – swoim zdaniem – umie odpowiedzieć najlepiej).

Osoby, które nie mogły poddać się egzaminowi w terminie pierwszym (tj. w miniony czwartek), zechcą się zjawić w terminie drugim (tj. w czwartek 16 bm.) i najpierw odpowiedzą na jedno z 4·5=20 pytań A1-D5, następnie będą je pytał dodatkowo. Po przedstawieniu odpowiedniego wyjaśnienia (jest nim np. zwolnienie lekarskie) każda z nich nie traci tzw. pierwszego terminu, tzn. uzyskuje prawo do poddania się dodatkowemu egzaminowi (i może zeń skorzystać, jeśli zajdzie taka okoliczność, a więc gdy nie uzyska oceny pozytywnej).

Student/ka, która nie uzyska oceny pozytywnej (w pierwszym lub drugim terminie) i której nie przepadł termin (termin przepada wskutek nieusprawiedliwionego niepoddania się egzaminowi), ma prawo złożyć – do PT Dziekana Wydziału, w ciągu trzech dni od daty ogłoszenia wyniku egzaminu – prośbę o egzamin komisyjny.